CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
https://cajmtcs.centralasianstudies.org

Volume: 04 Issue: 12 | Dec 2023 ISSN: 2660-5309

О КВАЗИКОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Утаев Азизбек Тойир угли
Каршинский государственный университет

Аннотация

В этой статье показано, что если OIM-гомеоморфное отражение является переносом поля в поле, то это отражение будет квазиконформой и будет определен его коэффициент квазиконформность.

ARTICLE INFO

Article history:
Received 10 Oct 2023
Revised form 15 Nov 2023
Accepted 23 Dec 2023

Ключевые слова:
OIM-гомеоморфное отражение, квазиконформ, коэффициент квазиконформность, отражение.

---***---

Отображение пространства $\bar{R}^n$ полностью характеризуется соотношением между модулями семейств кривых Γ и модулями их образов Γ^*, наличие константы $K>0$, с которой для всех семейств Γ выполнено двойное неравенства

$$K^{-1}M(\Gamma)\le M\left(\Gamma^*\right)\le KM(\Gamma) \tag{1}$$

Определяет $K-$квазиконформное отображение. В частности, если рассматривать ограничение $K-$квазиконформного отображения пространства $\bar{R}^n$ на некотором континиуме Σ, то для любой пары подконтиниумов $E,F\subset\Sigma$ двойное неравенства (1) выполняется для семейства Γ всех кривых в $\bar{R}^n$, соединяющих контениумы E и F. В качестве Γ^* рассматривается семейство всевозможных кривых в $\bar{R}^n$ соединяющих $f(E)$ и $f(F)$, Это позволяет рассмотреть класс гомеоморфных отображений континиума Σ в $\bar{R}^n$, для которых неравенство (1) выполняется при любом выборе подконтиниумов $E,F\subset\Sigma$. В этом классе, в частности, содержатся ограничения на Σ всех К-квазиконформных отображений пространства $\bar{R}^n$. Первоначальная идея рассмотрения гомеоморфизмов, определенных на континиумах и ограниченно искажающих модули (ОИМ-гомеоморфизмы), принадлежит П.П. Белинскому. В работах [3], [5]. изучены ряд свойств ОИМ-гомеоморфизмов. Прежде всего возникает квазиконформность ОИМ-гомеоморфизмов, то есть при каких областей определения Σ, заданные на них ОИМ-гомеоморфизмы являются квазиконформными, конечно весьма актуальным является зависимость коэффициента К при неравенства (1).

Определение [5]. Гомеоморфное отображение $f:\Sigma\to\bar{R}^n$ связного подмножества $\Sigma\subset\bar{R}^n$ называется ограниченно искажающим модулем (или ОИМ-гомеоморфизмом), если имеется константа $K>0$ такая, что неравенство

$$K^{-1}M\left(E,F\right)\le M\left(f(E),f(F)\right)\le KM\left(E,F\right)$$

выполняется для любой пары непересекающихся континуумов $E,F\subset\Sigma$. Наименьшая из всех таких констант К, называется коэффициентом искажения гомеоморфизма f.

Пусть $f:D\to D'$ гомеоморфизм пространственных областей. Тогда f является квазиконформным только в том случае, если величина

$$\left\{\limsup_{r\to0}\frac{\max\limits_{|x-x_0|=r}\left|f(x)-f(x_0)\right|}{\min\limits_{|x-x_0|=r}\left|f(x)-f(x_0)\right|},x\in D\setminus\left\{\infty,f^{-1}(\infty)\right\}\right\}$$

ограничена [2].

Приводим некоторые свойства ОИМ-гомеоморфизмов.

Теорема 1 [4]. Если гомеоморфизм $f:\Sigma\to\Sigma^*$ поверхностей класса C^1 в $\bar{R}^n$ является ОИМ-гомеоморфизмом с коэффициентом искажения Q, то он является $K-$квазиконформным с $K\le Q$.

Определение [5]. Парой называется объект вида $<\Sigma,U>$, где $U\subset\bar{R}^n$ является окрестностью континуума $\Sigma\subset\bar{R}^n$. Гомеоморфизм $f:\Sigma\to\Sigma^*$ называется ОИМ-гомеоморфизмом пары $<\Sigma,U>$ на пары $<\Sigma^*,U^*>$ если он удовлетворяет следующему условию: существует константа $Q>0$, такая, что для любых непересекающихся компактных континуумов $E,F\subset\Sigma$ и их образов $E^*,F^*\subset\Sigma^*$ выполняется оценка

$$Q^{-1}M\left(E,F;U\right)\le M\left(E^*,F^*;U^*\right)\le QM\left(E,F;U\right).$$

Пары $<\Sigma,U>$ и $<\Sigma^*,U^*>$ называются квазиконформно эквивалентным, если существует ОИМ-гомеоморфизм $f:<\Sigma,U>\to<\Sigma^*,U^*>$.

Теорема [5]. Если Σ-компактный континуум в области $U\subset\bar{R}^n$, то тождественное отображение $i:\Sigma\to\Sigma^*$ осуществляет ОИМ-гомеоморфизм пар $i:<\Sigma,U>\to<\Sigma^*,\bar{R}^n>$.

Следствие [5]. Пусть континуум Σ и Σ^* компактны соответственно в области U и U^*. Пары $<\Sigma,U>$ и $<\Sigma^*,U^*>$ квазиконформно эквивалентны тогда и только тогда, когда квазиконформно эквивалентны пары $<\Sigma,\bar{R}^n>$ и $<\Sigma^*,\bar{R}^n>$.

Это утверждение позволяет при изучение ОИМ-гомеоморфизмов не обращать внимание на объемлющее области U и U^*, если нас не интересует фактическая величина константы Q в определении ОИМ-гомеоморфизма.

В настоящей работе изучается свойства квазиконформности ОИМ-гомеоморфизма при отсутствии гладкости области определения. Для простоты приводим утверждение в случае $n=3$. Имеет место следующая.

Теорема. Если гомеоморфизм $f:\Sigma \to \Sigma^*$ поверхностей в $\bar{R}^n$ является ОИМ-гомеоморфизмом с коэффициентом искажения Q, то он является квазиконформным.

Доказательства. Пусть

$$B^3(x_0,r) \text{ есть шар } \left\{x\in R^3 : |x-x_0|\le r\right\}$$

$$B^3(r)=B^3(0,r),\ B^3=B^3(0,1)$$

$$S^2(x_0,r) \text{ есть сфера } \left\{x\in R^3 : |x-x_0|=r\right\}$$

$$S^2(r)=S^2(0,r),\ S^2(0,1)$$

Предположил, что $0\in\Sigma$, $f(0)\in\Sigma^*$. Для $0<r<1$, рассмотрим сферу S^2.

Пусть

$$M=\max_{|x-x_0|=r}\left|f(x)-f(x_0)\right|,$$

$$m=\min_{|x-x_0|=r}\left|f(x)-f(x_0)\right|.$$

Рассмотрим величину

$$L(r)=\frac{\max\limits_{|x-x_0|=r}\left|f(x)-f(x_0)\right|}{\min\limits_{|x-x_0|=r}\left|f(x)-f(x_0)\right|}$$

и оценим её сверху

Обозначаем через S_1 и S_2-прообразы сфер $S^2\left(f(0),M\right)$ и $S^2\left(f(0),m\right)$соответственно и $E=\operatorname{ext}S_1$, $F=\operatorname{int}S_2$ на Σ.

Если γ_1 есть континуум, соединяющий о со сферой $S^2(0,r)$, γ_2-континиум, соединяющий $S^2(0,r)$ с бесконечно удаленной точной, то имеет место следующее неравенство

$$M\left(E,F;R^3\right)\ge M\left(\gamma_1,\gamma_2;R^3\right)\ge a(3). \qquad (2)$$

Следовательно

$$\varlimsup_{r\to 0} L(r)\le \exp\left\{\left[\frac{4Q\pi}{a(3)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\},$$

и f является квазиконформным отображением.

Литература

1. Сычев А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения,-Новосибирск «Наука». 1983., с. 152.
2. David B. Gauld and M. K. Vamanamurthy. Quasiconformal extensions of mappings in n-space. Ann. Acad. Sci. Fenn. SerAI, 1977. V. 3. P. 229-248.
3. Варисов А. К. О продолжении пространственных квазиконформных отображений. Докл. АН СССР. Издательство «наука». Москва. 1977. Том 234. № 4.стр. 740-742.
4. Асеев В. В. Ворисов А. К. Об одном признаке квазиконформности отображений гладких поверхностей. Докл. АН СССР. Издательство «наука». Москва. 1977. Том 234. № 5. Стр. 1001-1003.
5. Асеев В. В. О гомеоморфизмах, ограниченно искажающих модули в объемлющем пространстве. Теория отображений, ее обобщения и приложения. Сб. научных трудов. Киев, Наукова думка 1982,стр. 9-18.